Das Maßproblem

Hannes Benne

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik

1. November 2018

Gliederung

Gliederung

Das Maßproblem

Lässt sich jeder Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf sinnvolle Weise ein Volumen zuordnen?

Eigenschaften von Maßen

Positivität: Keiner Mengen soll ein negatives Volumen zugeordnet werden.

$$0 \leq \mu(A) \text{ für } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

Eigenschaften von Maßen

Translationsinvarianz: Verschiebt man eine Menge im Raum, soll sich ihr Volumen nicht ändern.

$$\mu(A) = \mu(A + x) \text{ für } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$$

Eigenschaften von Maßen

$\sigma-$**Additivität:** Wird eine Menge in abzählbar viele disjunkte Teile zerlegt, soll die Summe der Volumina dieser Teilmengen gleich dem Volumen der ursprünglichen Menge sein.

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \text{ für } A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \ldots$$

Eigenschaften von Maßen

Normiertheit: Der n-dimensionale Einheitswürfel soll Volumen eins haben.

$$\mu([0,1]^n) = 1$$

Weitere Eigenschaften

Aus den bisher geforderten Eigenschaften folgt:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(\{x\}) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$
- $\mu(A) \leq \mu(B)$ falls $A \subseteq B$

Das Maßproblem [Lebesgue, 1902]:

Finde eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mit den folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq \mu(A)$
- $\mu(A) = \mu(A + x)$ für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$
- $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ für $A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \ldots$
- $\mu([0, 1]^n) = 1$

Henri Léon Lebesgue

Giuseppe Vitali

Der Satz von Vital [Vitali, 1905]

Das Maßproblem ist nicht lösbar.

Das Auswahlaxiom

$$\forall u((\emptyset \notin u \wedge \forall x \forall y(x \in u \wedge y \in u \wedge x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset)) \Rightarrow \exists v \forall x(x \in u \Rightarrow \exists! y(y \in x \wedge y \in v)))$$

Zu jeder Menge von disjunkten nichtleeren Mengen gibt es eine Menge, die aus jeder dieser Mengen genau ein Element enthält.

Vitalimengen

Wir definieren folgendermaßen eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$:

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Vitalimengen

Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ im Intervall $[0, 1]$ genau einen Repräsentanten enthält. Eine solche Menge $V \subseteq [0, 1]$ von Repräsentanten, nennen wir Vitali-Menge.

Vitalimengen

Sei $q_1, q_2, q_3, \ldots$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[-1, 1]$. Wir definieren:

$$V_k = \{v + q_k | v \in V\} \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

Nichtmessbarkeit von Vitalimengen

Es gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subseteq [-1, 2].$$

Nichtmessbarkeit von Vitalimengen

Es gilt

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subseteq [-1,2].$$

Nichtmessbarkeit von Vitalimengen

Aus der Monotonie von Maßen folgt:

$$\mu([0,1]) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) \leq \mu([-1,2]).$$

Nichtmessbarkeit von Vitalimengen

Aus der Monotonie von Maßen folgt:

$$1 \leq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\Big) \leq 3$$

Nichtmessbarkeit von Vitalimengen

Wegen σ - Additivität von Maßen folgt:

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V_k) \leq 3$$

Nichtmessbarkeit von Vitalimengen

Wegen Translationsinvarianz von Maßen gilt
$\mu(V_k) = \mu(V + p_k) = \mu(V)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und deswegen:

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V) \leq 3$$

Nichtmessbarkeit von Vitalimengen

Fall 1: $\mu(V) = 0$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(V) = 0 \geq 1.$$

Nichtmessbarkeit von Vitalimengen

Fall 2: $\mu(V) > 0$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(V) = \infty \leq 3.$$

Nichtmessbarkeit von Vitalimengen

Wir haben also die Annahme, es gäbe ein positives, translationsinvariantes, σ-additives und normiertes Maß zu einem Widerspruch geführt.

Gliederung

Das Inhaltsproblem

Finde eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mit den folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq \mu(A)$
- $\mu(A) = \mu(\beta(A))$ für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$ und eine Bewegung β
- $\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ für $A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), k = 1, 2, \ldots, n$
- $\mu([0,1]^n) = 1$

Satz von Banach [1923]

Das Inhaltsproblem ist lösbar für $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$, aber es ist nicht eindeutig lösbar.

Galileo Galilei

"Wollen wir die Körper teilen in eine endliche Anzahl von Teilen, so ist es unzweifelhaft, dass wir sie nicht zusammensetzen können zu Körpern, die mehr Raum einnehmen als früher."

Satz von Banach-Tarski [1924]

Sei $n \geq 3$ und seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte Mengen mit nichtleerem Inneren. Dann existieren eine endliche disjunkte Zerlegung $A_1, \ldots A_k$ von A und zugehörige Bewegungen $\beta_1, \ldots, \beta_k$ derart, dass B die disjunkte Vereinigung von $\beta_1(A_1), \ldots, \beta_k(A_k)$ ist.

Banach-Tarski-Paradoxon

Satz von Hausdorff [1914]

Das Inhaltsproblem ist für $n \geq 3$ nicht lösbar.

Gliederung

Literatur

- Struve, Michael (2007): Analysis III, Department of Mathematics, ETH Zürich, https://people.math.ethz.ch/~struwe/Skripten/AnalysisIII-SS2007-18-4-08.pdf (27.10.2018)
- Elstrodt, Jürgen (2011): Maß- und Integrationstheorie, 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York